Динамические системы
и
методы математического моделирования

Клеточные автоматы. Самоорганизованная критичность

Клеточный автомат - сеть из элементов, меняющих свое состояние в дискретные моменты времени по определенному закону в зависимости от того, каким было состояние самого элемента и его соседей в предыдущие моменты времени.

сеть

$\{(\text{элемент})_j,\ j=1,\ldots,N\}$

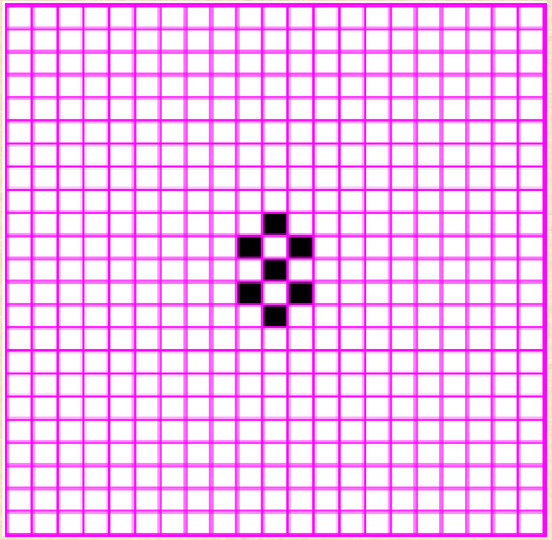
Связи:

каждому элементу j сопоставляется множество его соседей O(j)

Состояние элемента j в момент времени n характеризуется переменной $a_j^{(n)}$, которая может быть числом (**R** или **C**) или совокупностью чисел.

Клеточные автоматы

- Идея клеточных автоматов появилась в конце сороковых годов 20 века. Она была задумана и сформулирована Джоном фон Нейманом и Конрадом Цусе независимо друг от друга как универсальная вычислительная среда для построения, анализа и сравнения характеристик алгоритмов.
- дискретная динамическая система, представляющая собой совокупность одинаковых клеток, одинаковым образом соединенных между собой.



Правила перехода

Простейший случай - однородные автоматы: элементы в сети и связи между ними одинаковые, ближайшие соседи в равной степени влияют на переход элемента в другое состояние.

Примеры:

Детерминированный автомат без памяти (память - зависимость от $a_j^{(n-1)}$,…)

$$a_j^{(n+1)} = F(a_j^{(n)}, \sum_{i \in O(j)} a_i^{(n)})$$

Вероятностный автомат (*w* - вероятность перехода)

$$w = w(a_j^{(n+1)} \middle| a_j^{n}, \sum_{i \in O(j)} a_i^{(n)})$$

В общем случае автоматы необратимы - по конечному состоянию нельзя восстановить начальное!

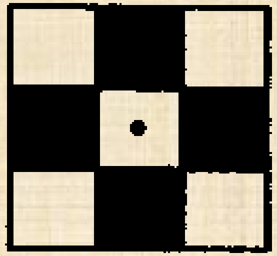
Топологические свойства

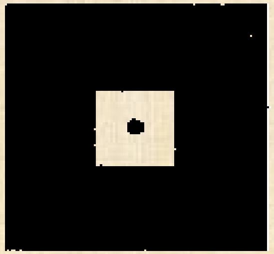
Регулярная сеть - элементы располагаются в узлах правильной решетки.

Правильная решетка - квадратная, гексагональная плоская решетка, кубическая в R^n (n=3,4,…).

Примечание: кубическая решетка может быть сформирована на плоскости или на прямой!

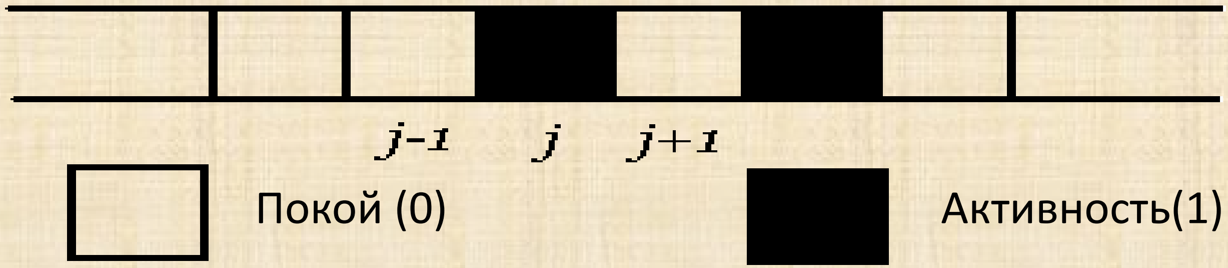
Разные определения ближайших соседей





Классификация

Класс I Автоматы достигают за конечное число шагов однородного состояния (величины $a_j^{(n)}$ имеют одно и тоже значение независимо от начальных условий).

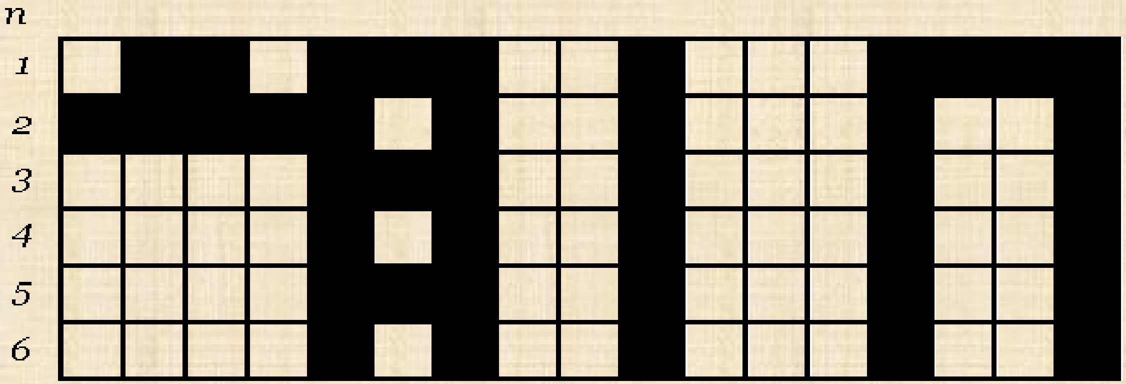


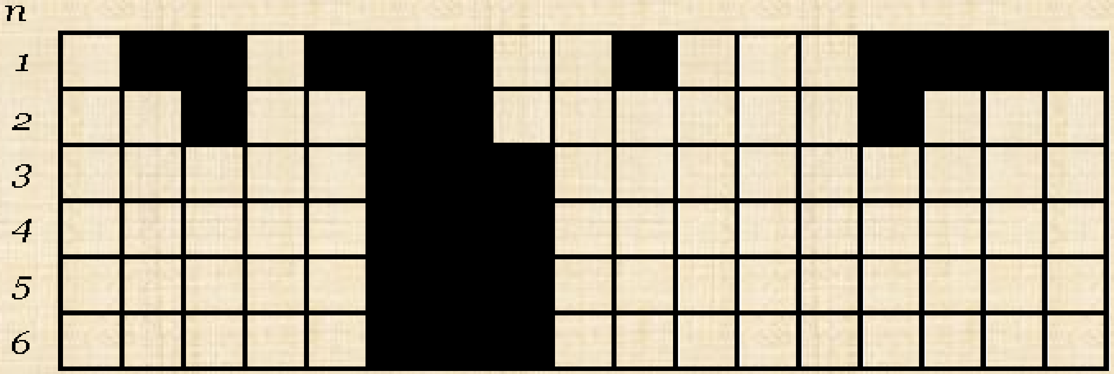
$$a_j^{(n+1)} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad a_j^{(n)} = a_{j-1}^{(n)} = a_{j+1}^{(n)} = 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Исчезают одиночки и пары! В группах из 3 и более элементов исчезают края!

Автоматы *класса II* генерируют локализованные структуры - стационарные или периодические

$$a_j^{(n+1)} = \begin{cases} 1, если & a_j^{(n)} = 1, \quad a_{j-1}^{(n)} + a_{j+1}^{(n)} = 0, \\ 1, если & a_j^{(n)} = 1, \quad a_{j-1}^{(n)} + a_{j+1}^{(n)} = 1, \\ 1, если & a_j^{(n)} = 0, \quad a_{j-1}^{(n)} + a_{j+1}^{(n)} = 0, \\ 0 \quad в & остальных \quad случаях \end{cases}$$





$$a_j^{(n+1)} = \begin{cases} 1, \ если & q_j^{(n)} = 3, \\ 0 \quad в & остальных \quad случаях \end{cases}$$

где: $$q_j^{(n)} = \sum_{l=-2}^{2} a_{j+l}^{(n)}$$

Генерируются устойчивые тройки! Периодические граничные условия

Классификация

Класс III Обладают «эргодическим» поведением, статистические свойства не зависят от начальных условий

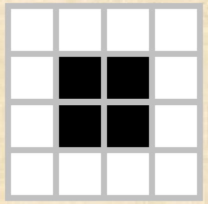
Класс IV Позволяют осуществлять универсальные вычисления

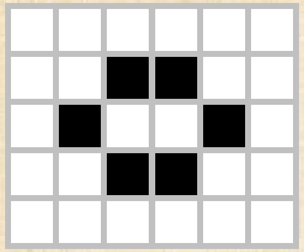
Пример автомата класса IV

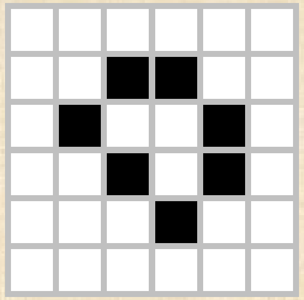
Игра «Жизнь» (Джон Конвей, 1970)

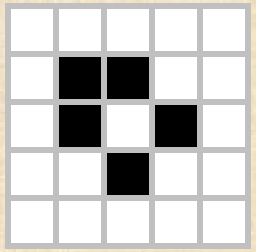
Игра «Жизнь»

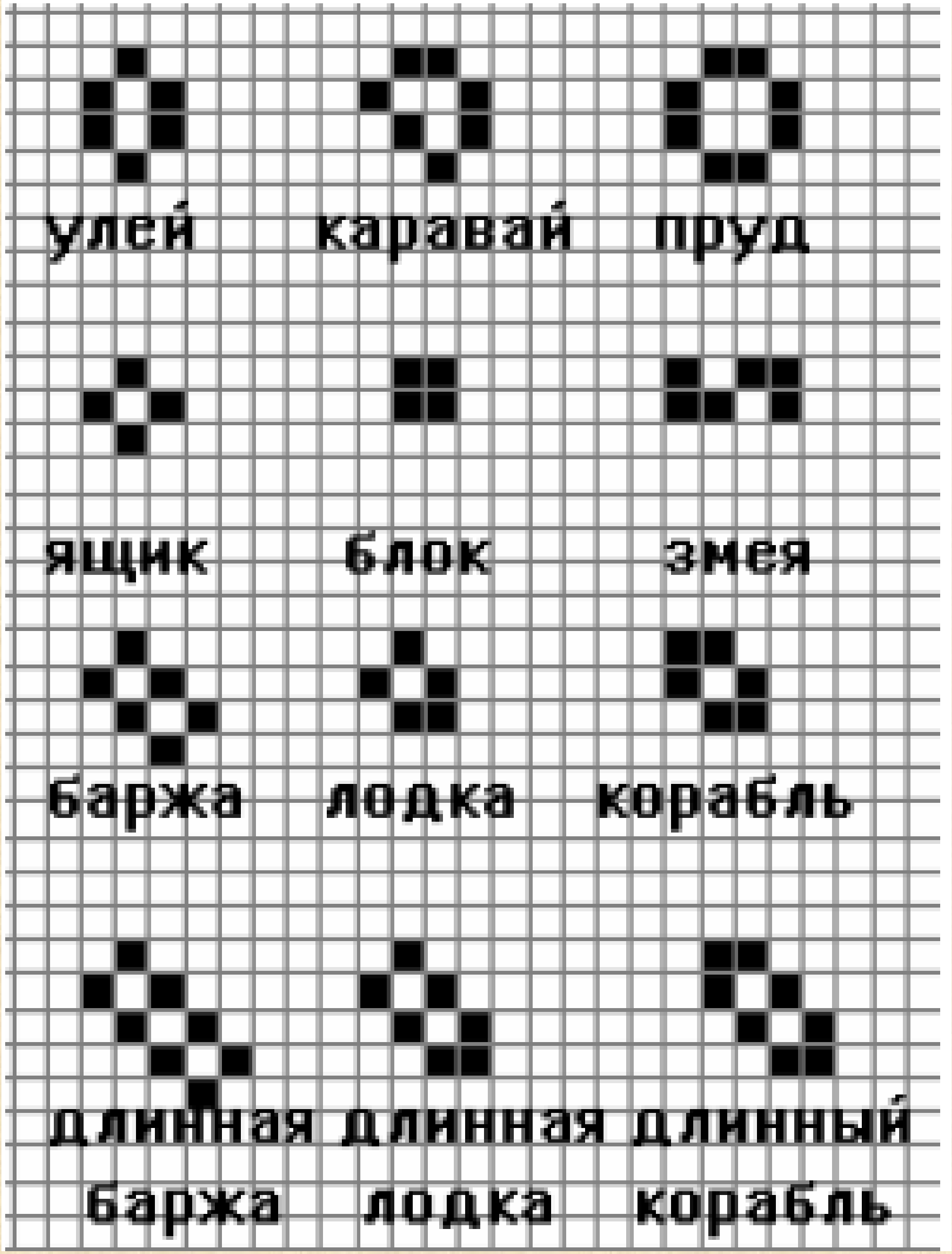
Стационарные структуры





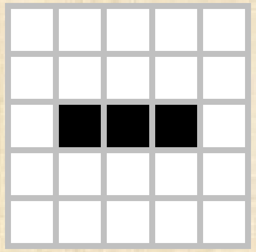


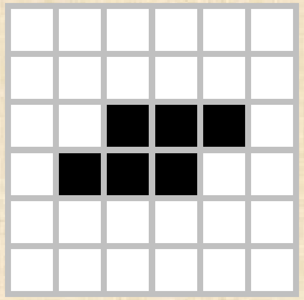


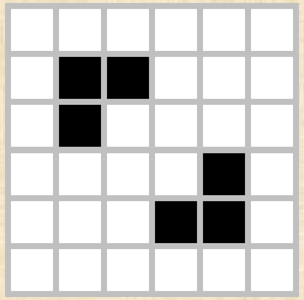


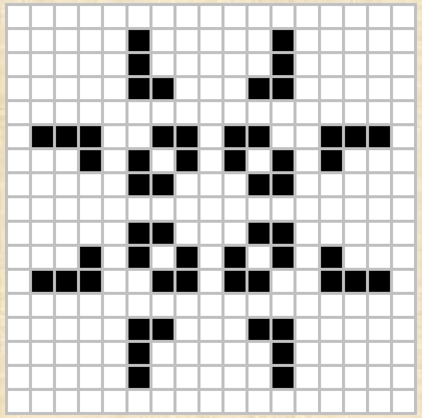
Игра «Жизнь»

Колебания

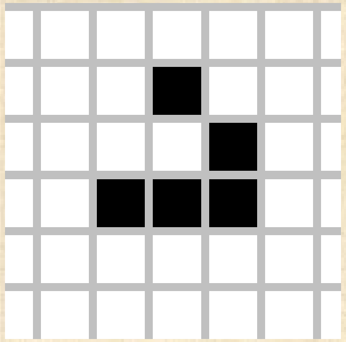


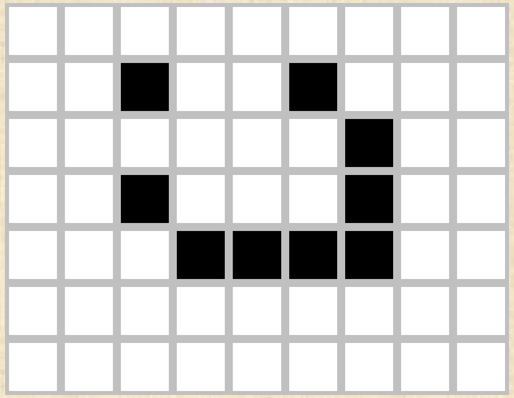






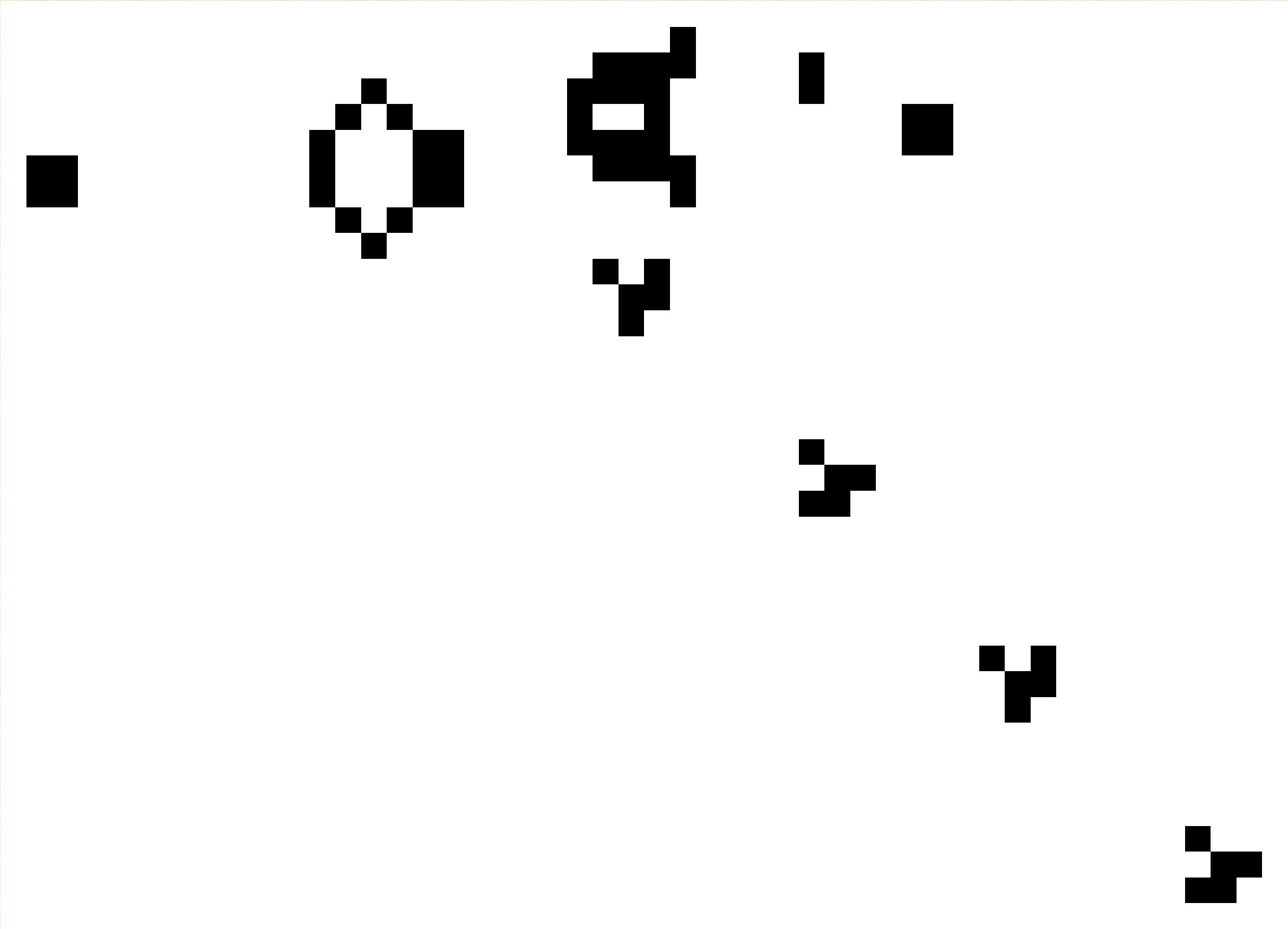
Космические корабли



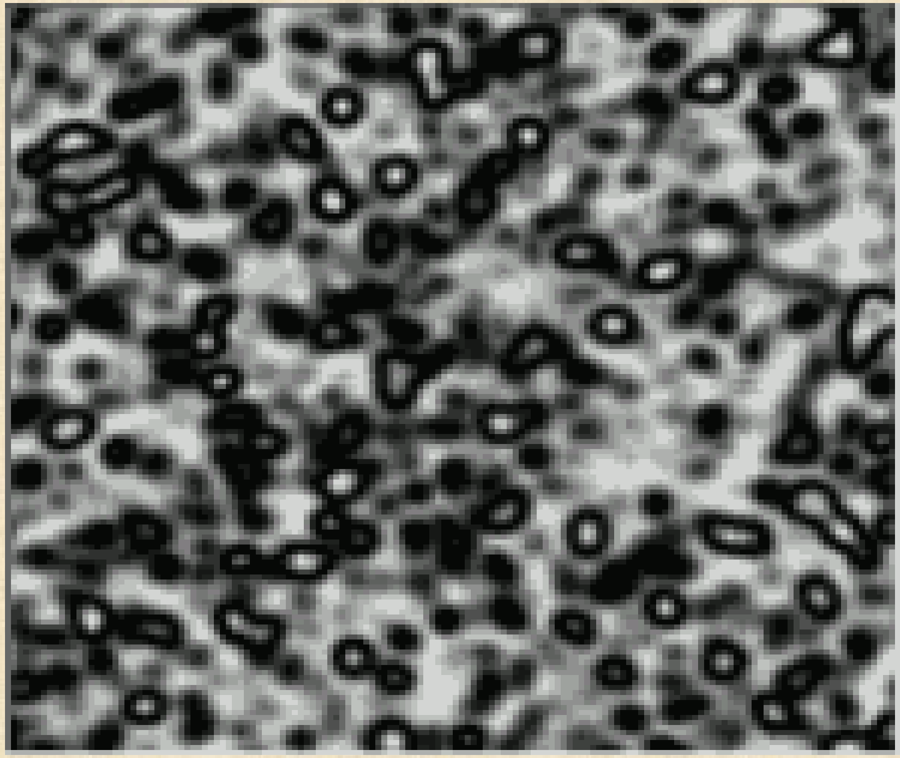


Игра «Жизнь»

Бесконечно растущая фигура

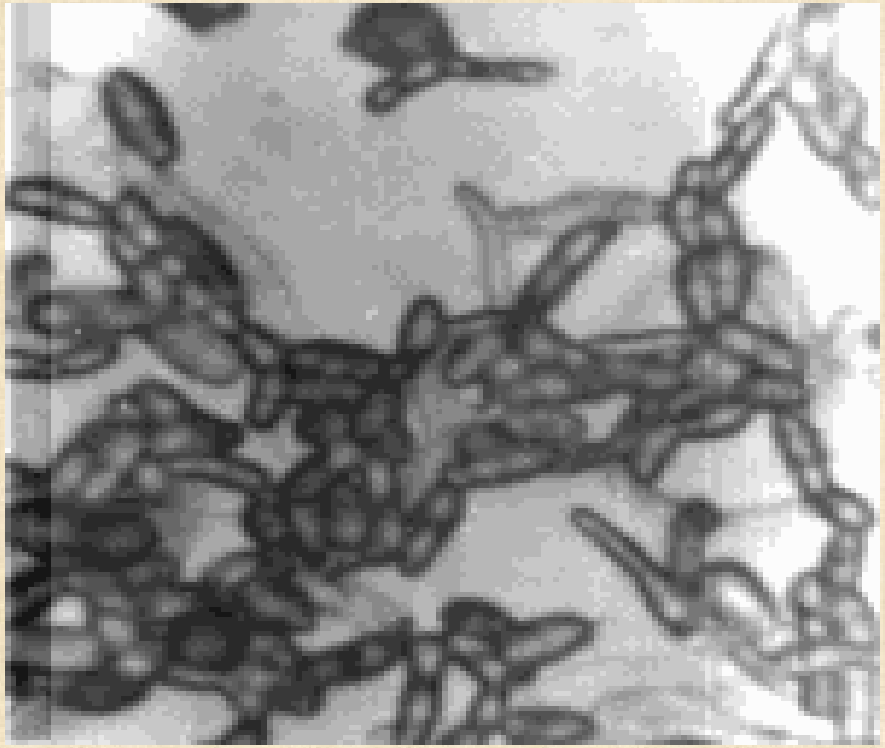


Игра «Жизнь»



Микробы компьютерные

Живые микробы

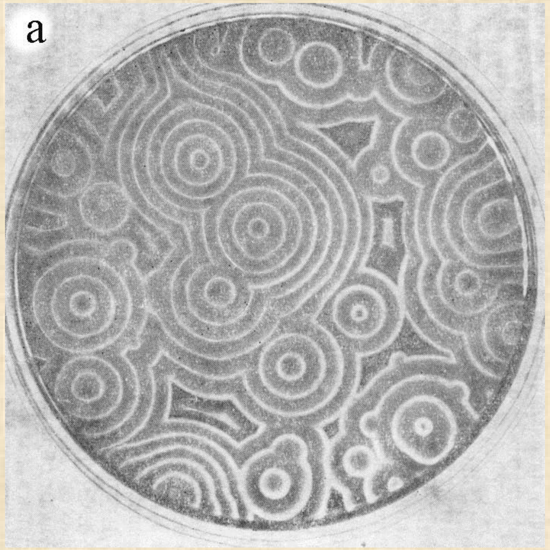


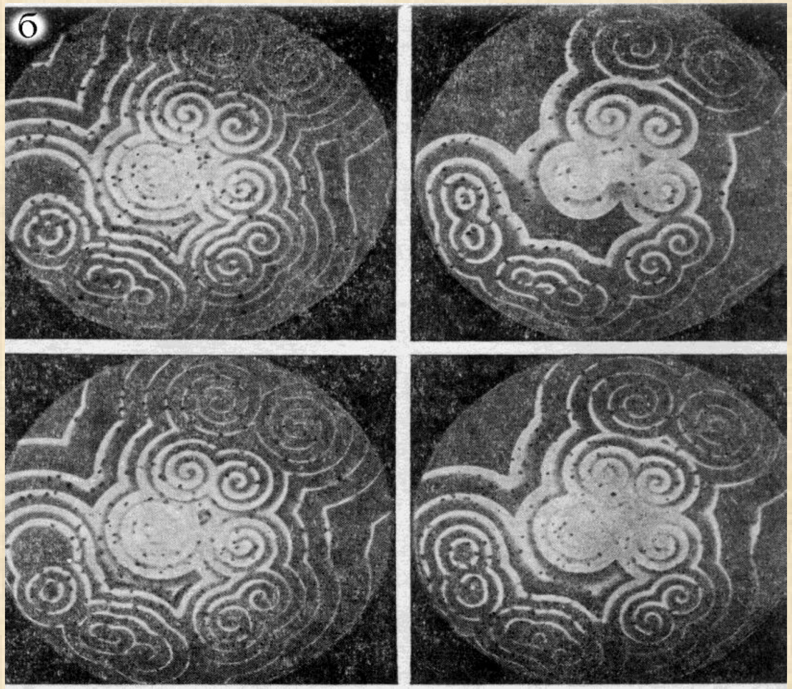
Реакция Белоусова-Жаботинского

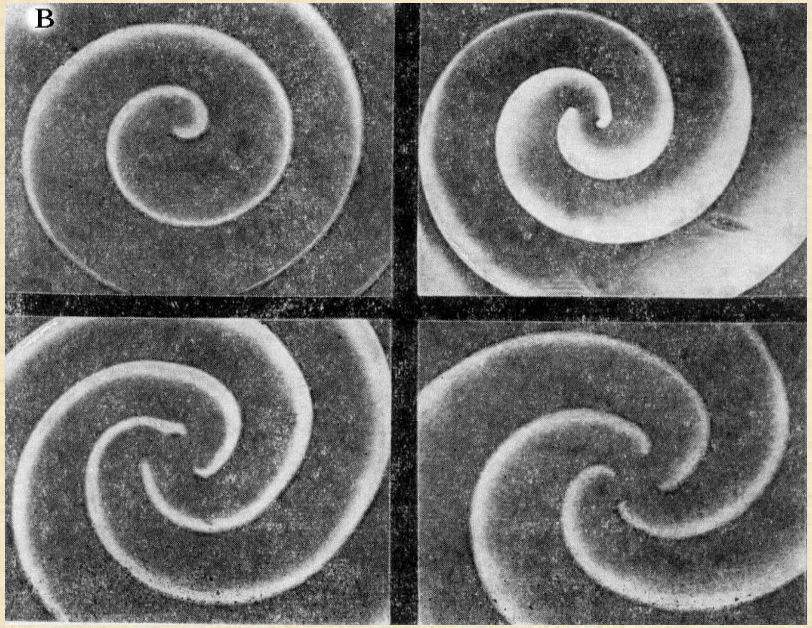
Колебания концентраций окисленной и восстановительной форм церия (катализатора) в реакции взаимодействия лимонной кислоты с броматом калия. Раствор регулярно менял окраску от бесцветной (обусловленной наличием Ce^{4+}) к желтой (обусловленной Ce^{3+}), затем снова к бесцветной и т.д. При этом период колебаний сильно уменьшается с повышением кислотности среды и температуры (управляющие параметры). Колебания можно было легко наблюдать визуально, их период (10-100 сек., в зависимости от величины управляющих параметров) находится в пределах естественного для человека-наблюдателя масштаба времени.

Если реакция БЖ протекает без перемешивания, это приводит к развитию *пространственных неоднородностей.*

•Для постановки эксперимента достаточно в чашку Петри, тонким слоем налить реагенты. При этом на поверхности этого слоя можно наблюдать регулярные пространственно-временные картины *в виде распространяющихся волновых фронтов.*



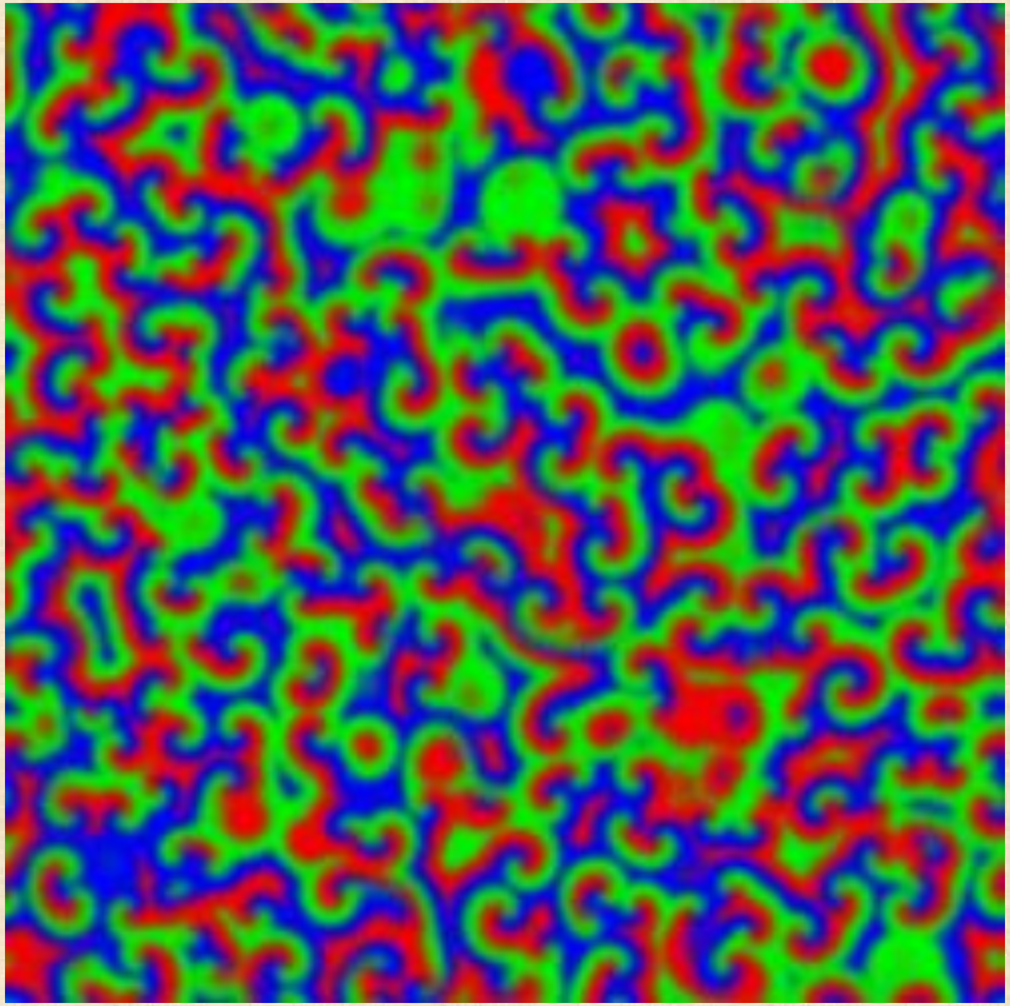




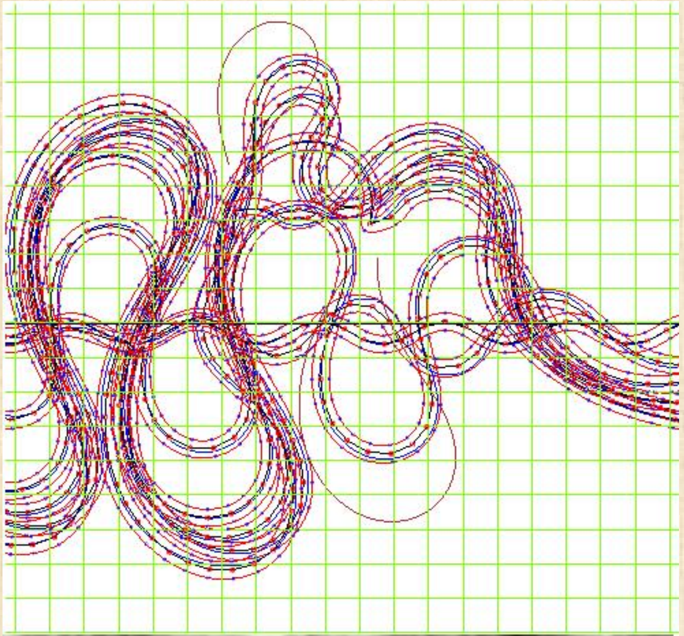
кольцевые фронты ***спиральные фронты*** ***многозаходные спирали***

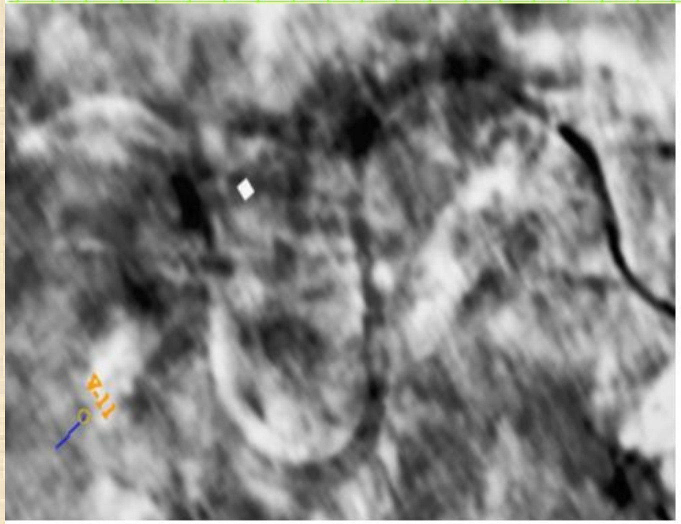
Реакция Белоусова-Жаботинского

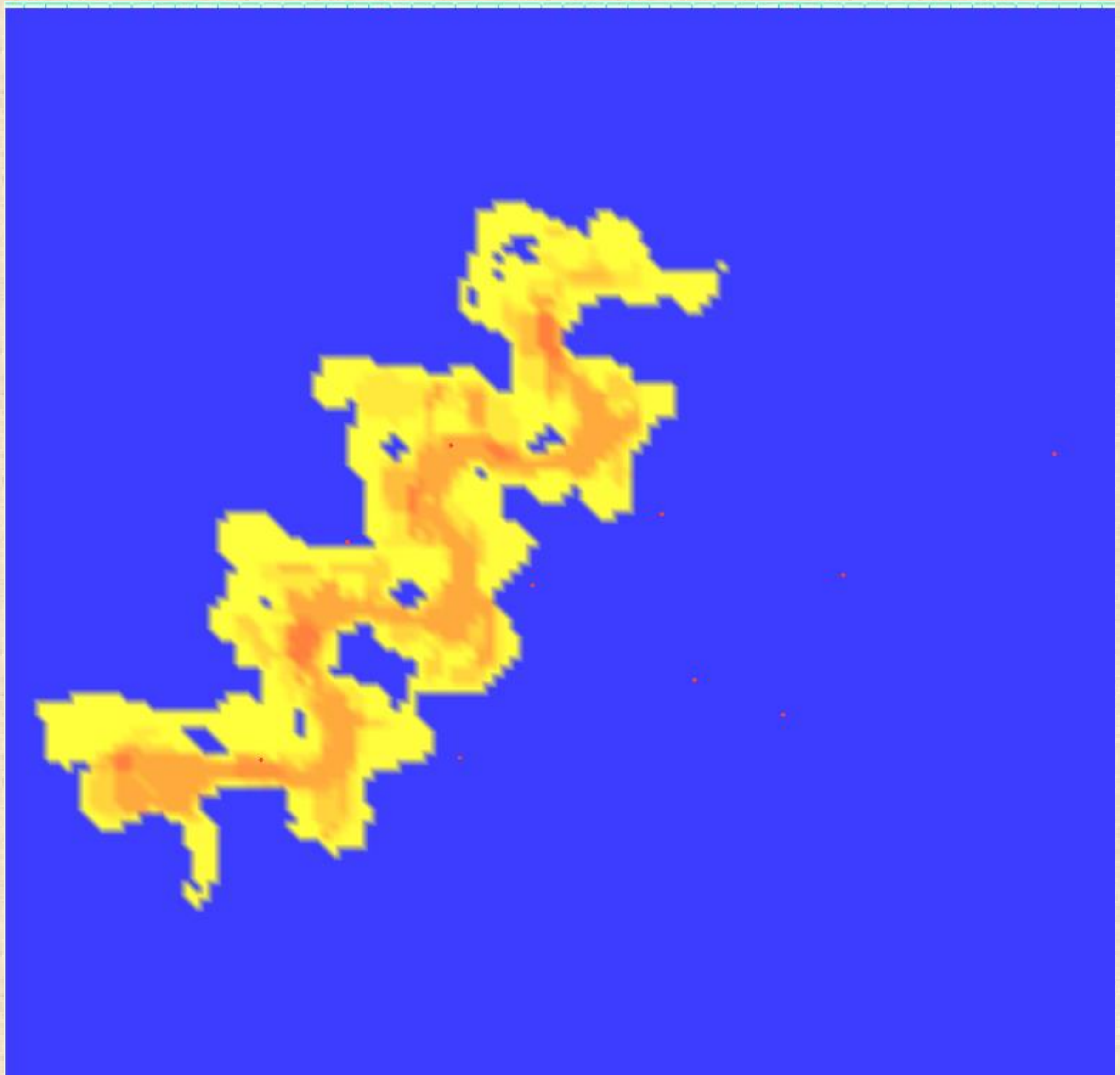
Клеточный автомат



Моделирование речных отложений

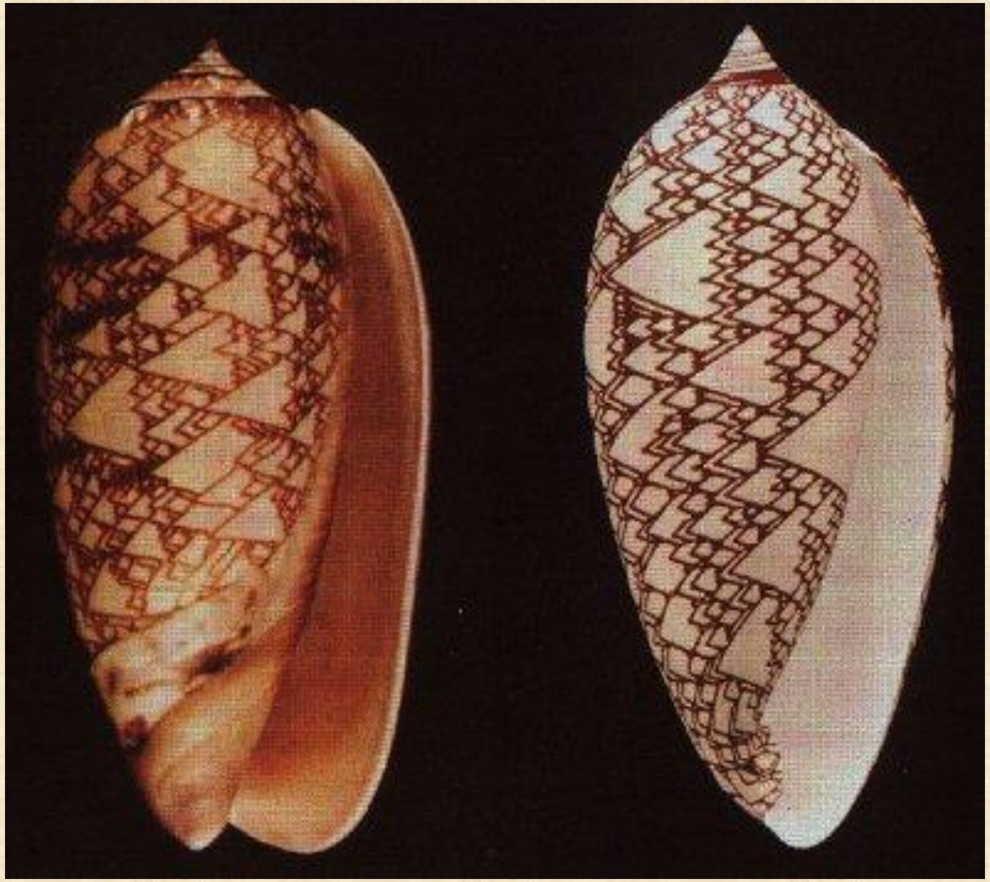






Клеточные автоматы и искусство

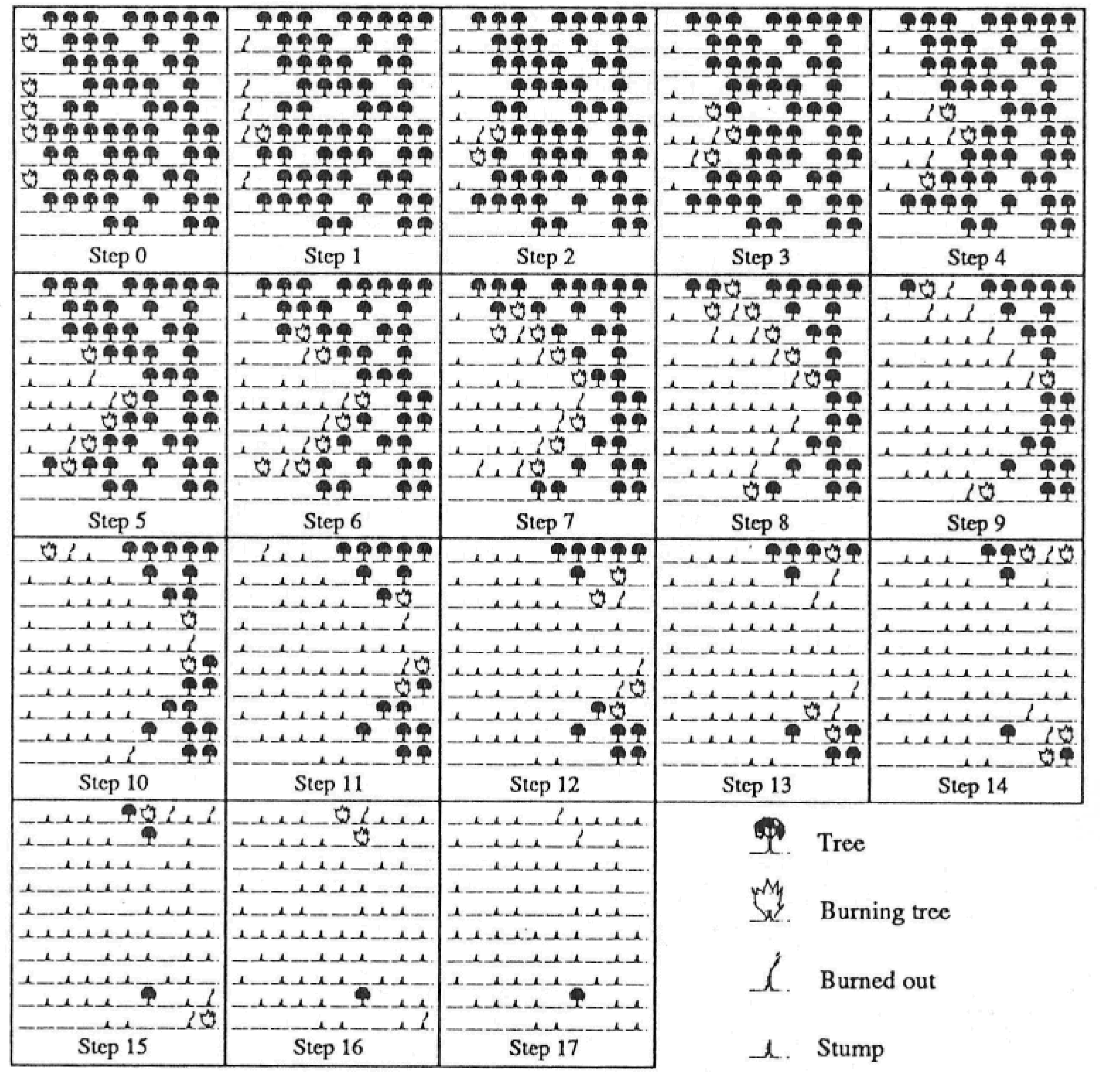
Настоящая

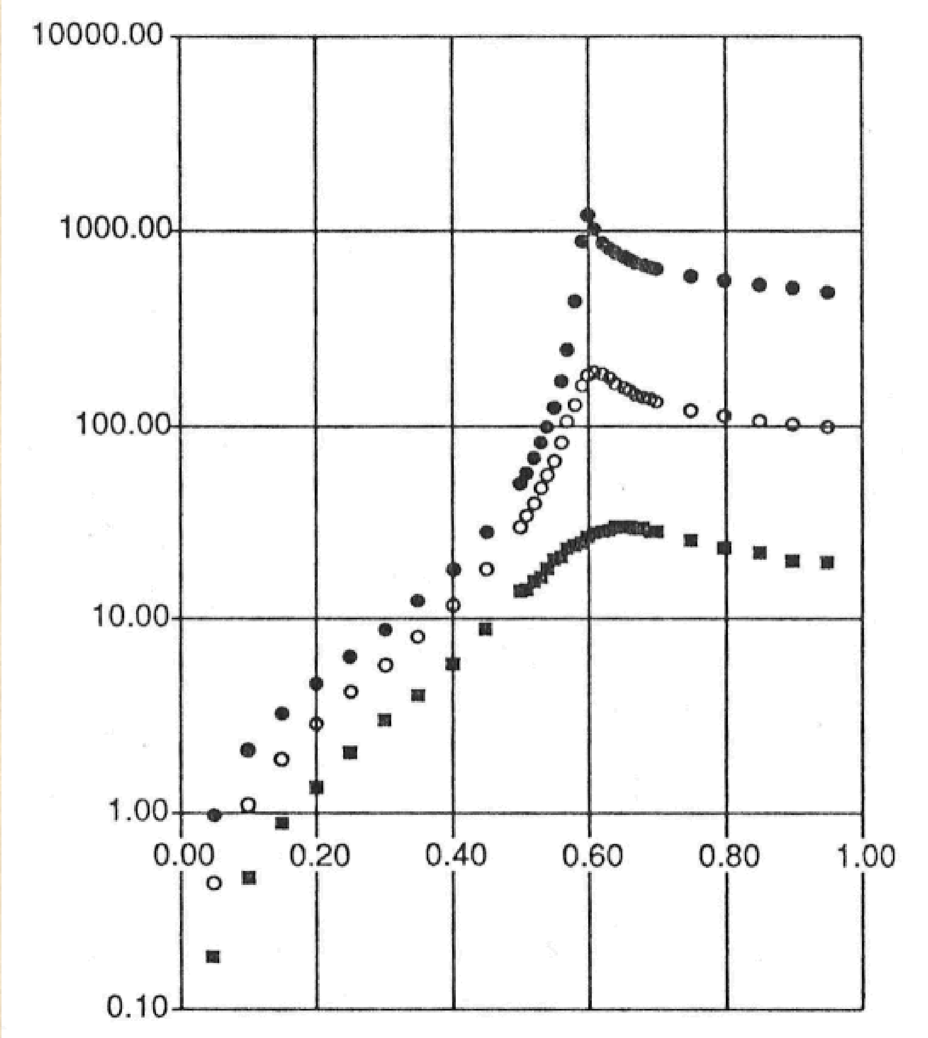


сгенерированная

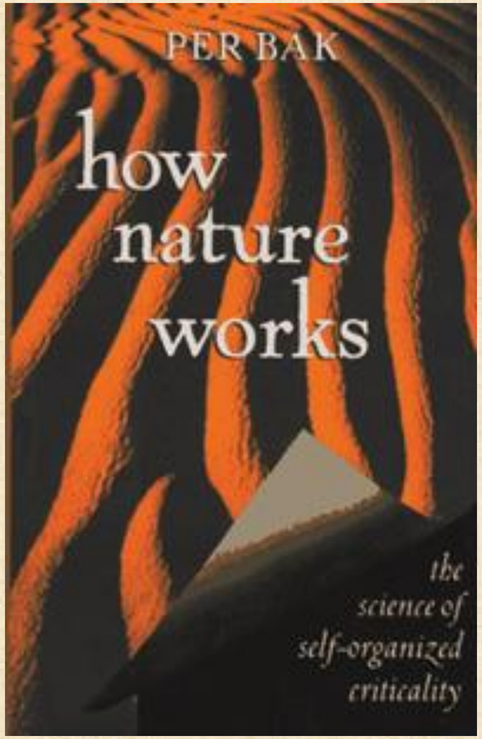
Слева настоящая раковина, справа – она же сгенерированная с помощью клеточного автомата

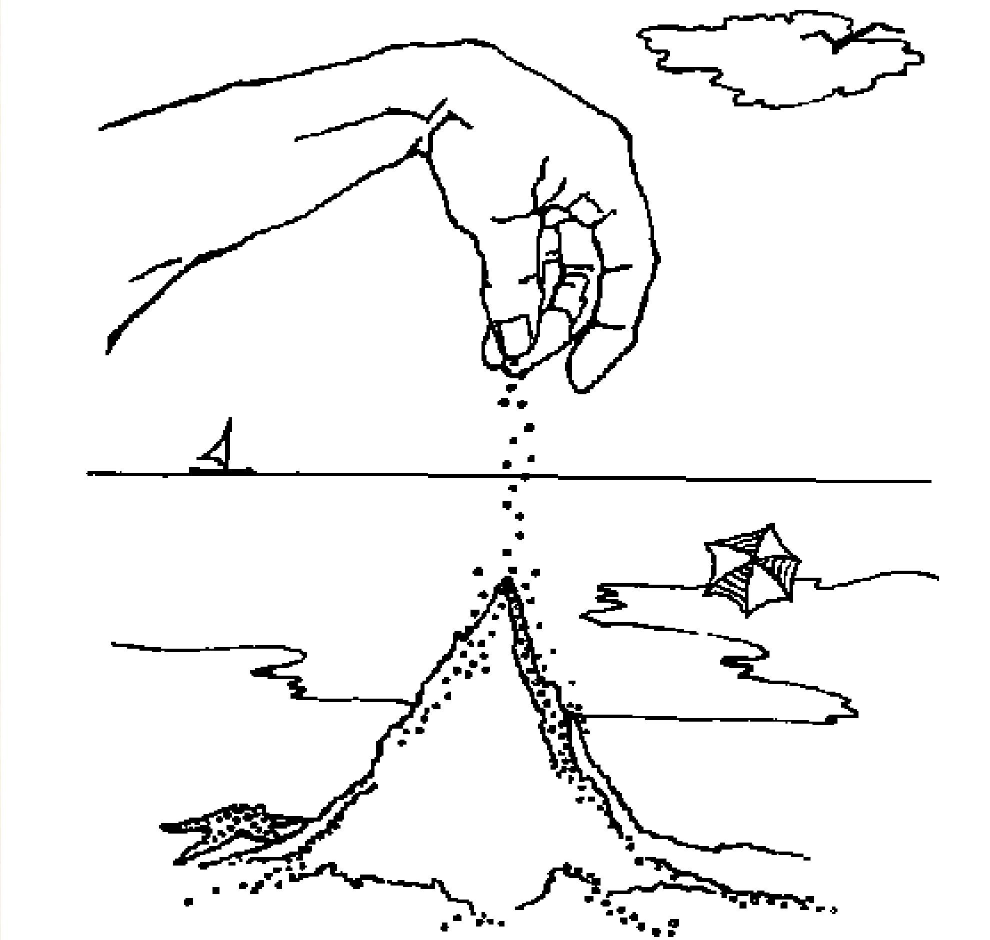
Перколяции и лесные пожары





Самоорганизованная критичность





The sandpile model / Модель «куча песка»

1. Куча песка располагается на столе, разбитом на ячейки.

$Z(x,y)$ – количество песчинок в ячейке с координатами (x,y) (песчинки образуют «столбик»)

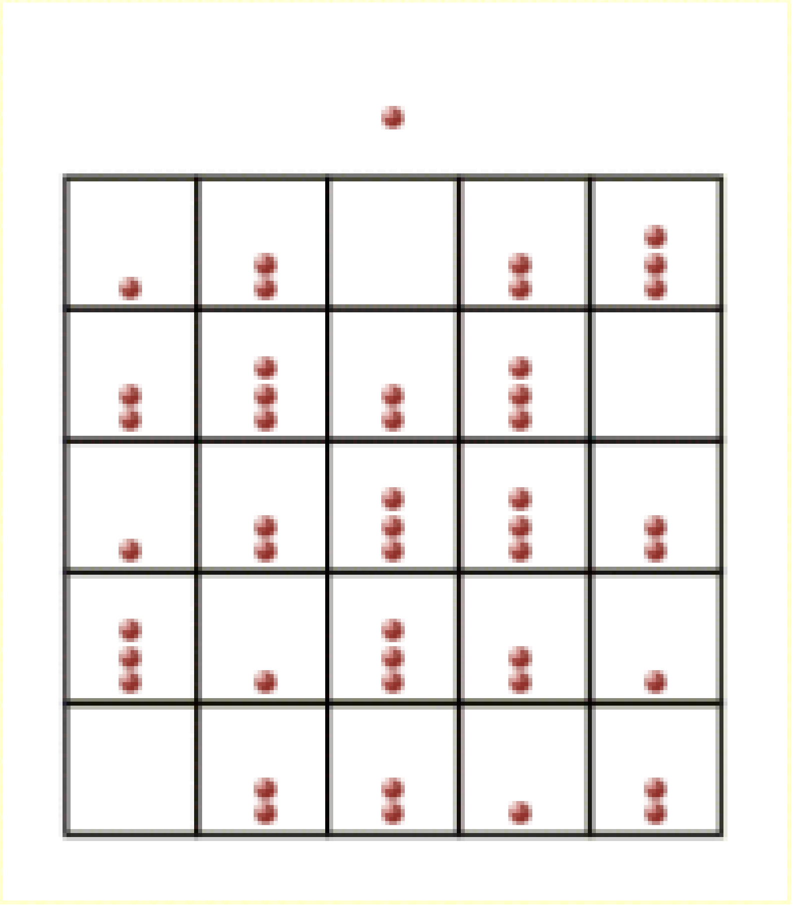
2. К произвольно выбранной ячейке добавляется песчинка, увеличивая высоту на единицу: $Z(x,y) \to Z(x,y) + 1$

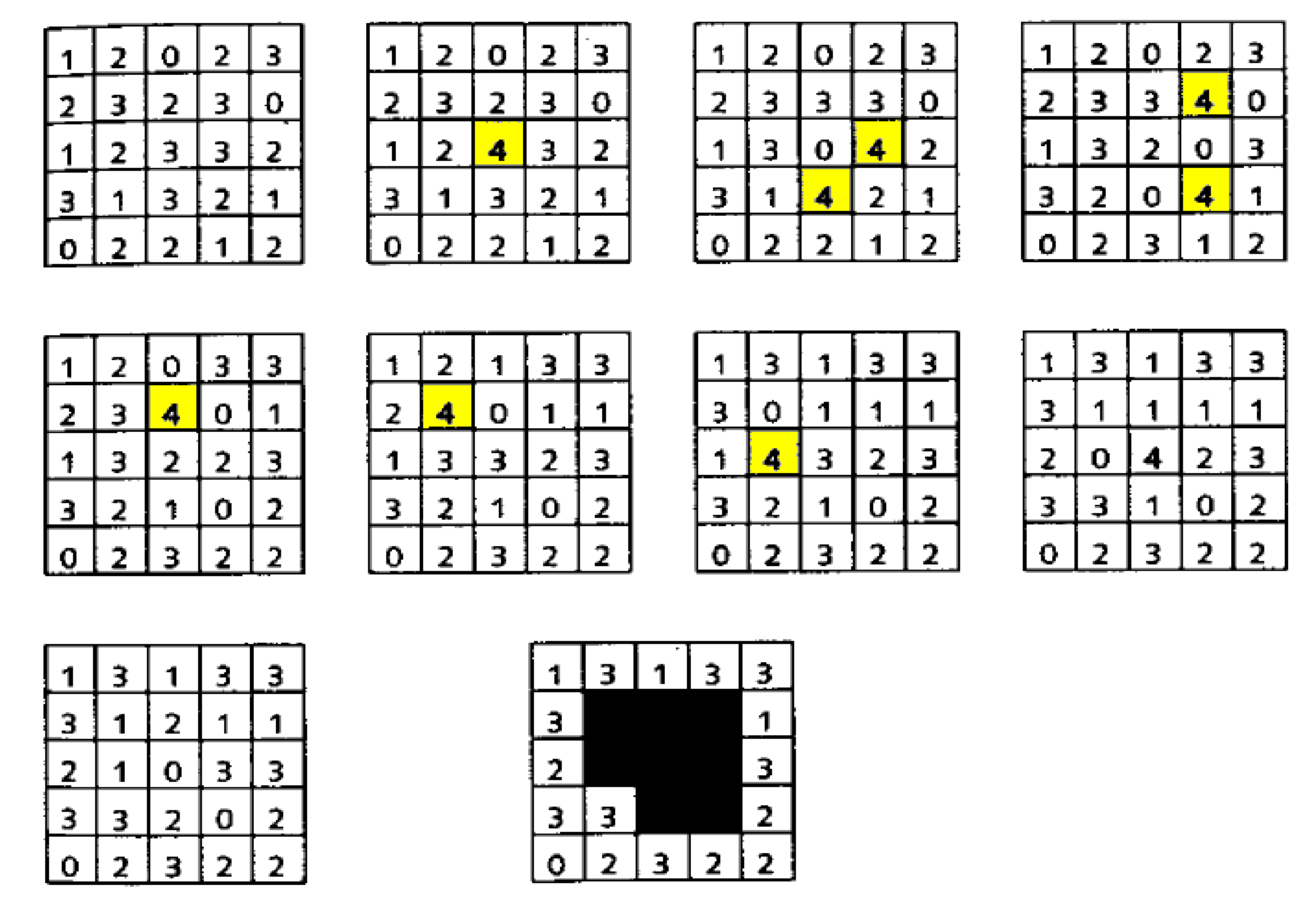
3. Если $Z(x,y)$ превосходит критическое значение Z_{cr} , в четыре ближайших клетки перемещается по песчинке:

$$Z(x,y) \to Z(x,y) - 4$$

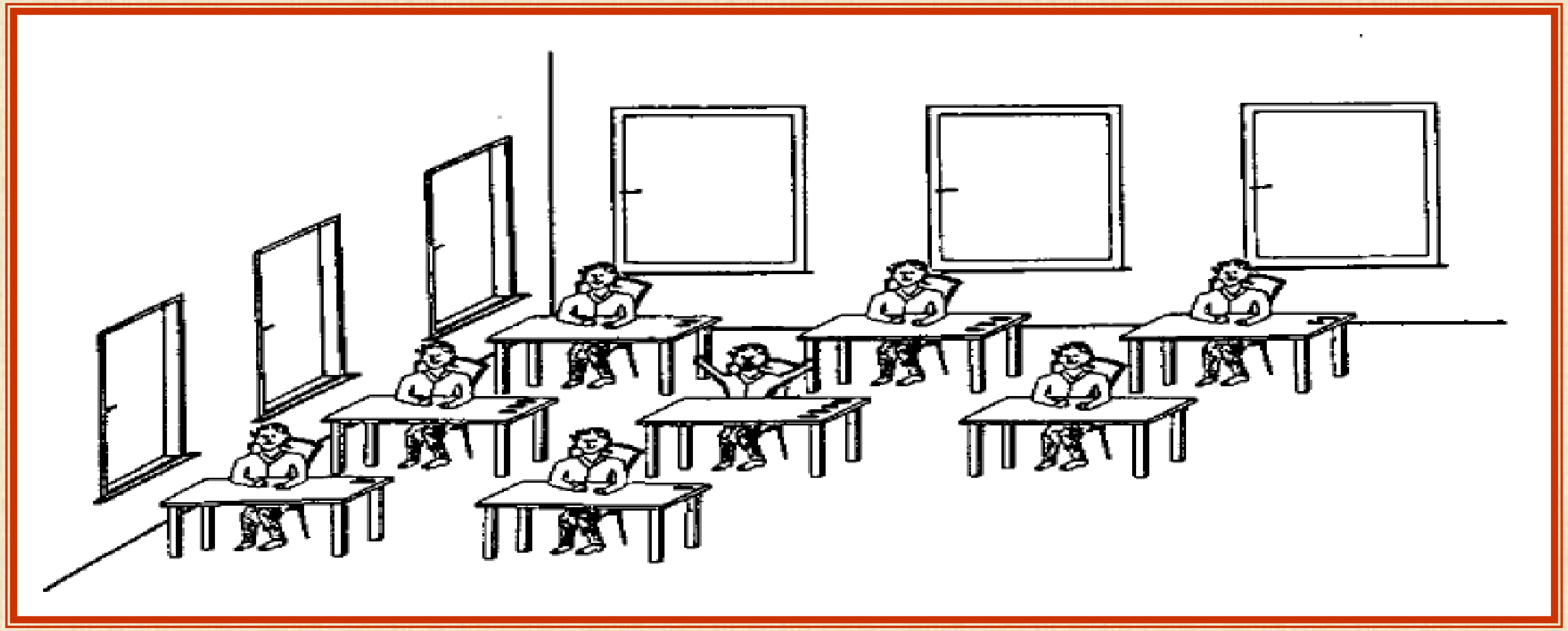
$$Z(x\pm1,y)\to Z(x\pm1,y) + 1,\ Z(x,y\pm1)\to Z(y,x\pm1) + 1$$

The sandpile model / Модель «куча песка»





Офисная версия модели «куча песка»



С регулярными интервалами на лист бумаги кладется на стол произвольно выбранного бюрократа. Когда у бюрократа скапливается четыре или более листочков, он раздает по листочку соседям (а если соседей меньше 4, то выбрасывает лишние листочки в окно)

BTW Model in 2-D

- Возможна ли обратная эволюция системы к критически устойчивому состоянию?

- НЕТ! Поскольку каждая ячейка связана более, чем с одной соседней, небольшие возмущения усиливаются и передаются через всю кучу.

- Таким образом, критически устойчивые состояния неустойчивы по отношению к малым флуктуациям и не могут быть аттракторами динамики.

Степенные законы и размеры лавин

- Критические состояния слабо возмущаются и измеряются размеры образовавшихся лавин.
- Построим распределение размеров лавин $D(s)$ и попробуем фитировать его степенным законом.

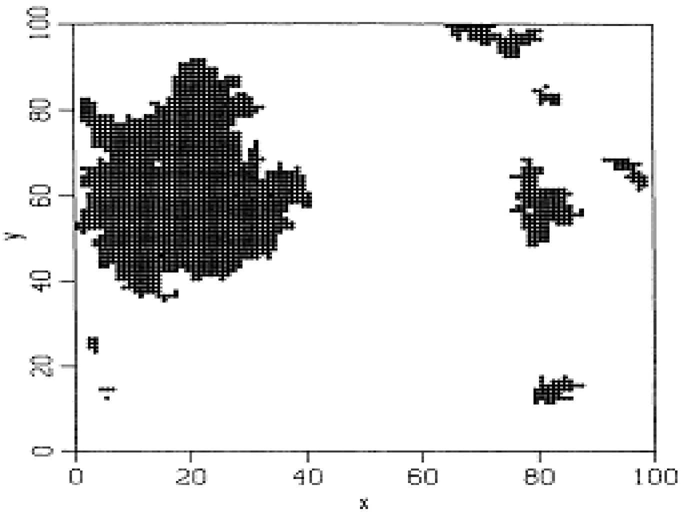
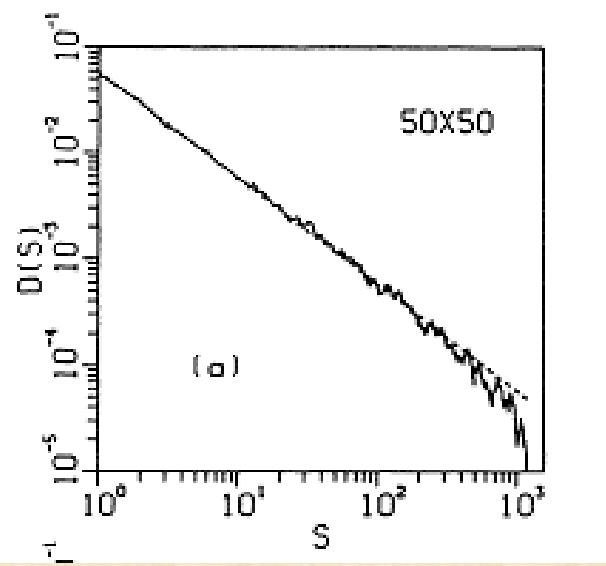


FIG. 2. Typical domain structures resulted from several local perturbations for a 100×100 array. Each cluster is triggered by a single perturbation.



$$D(s) \approx s^{-\tau}, \quad \tau \approx 1.0 \quad \text{for } D = 2 \, . \qquad (3.3)$$

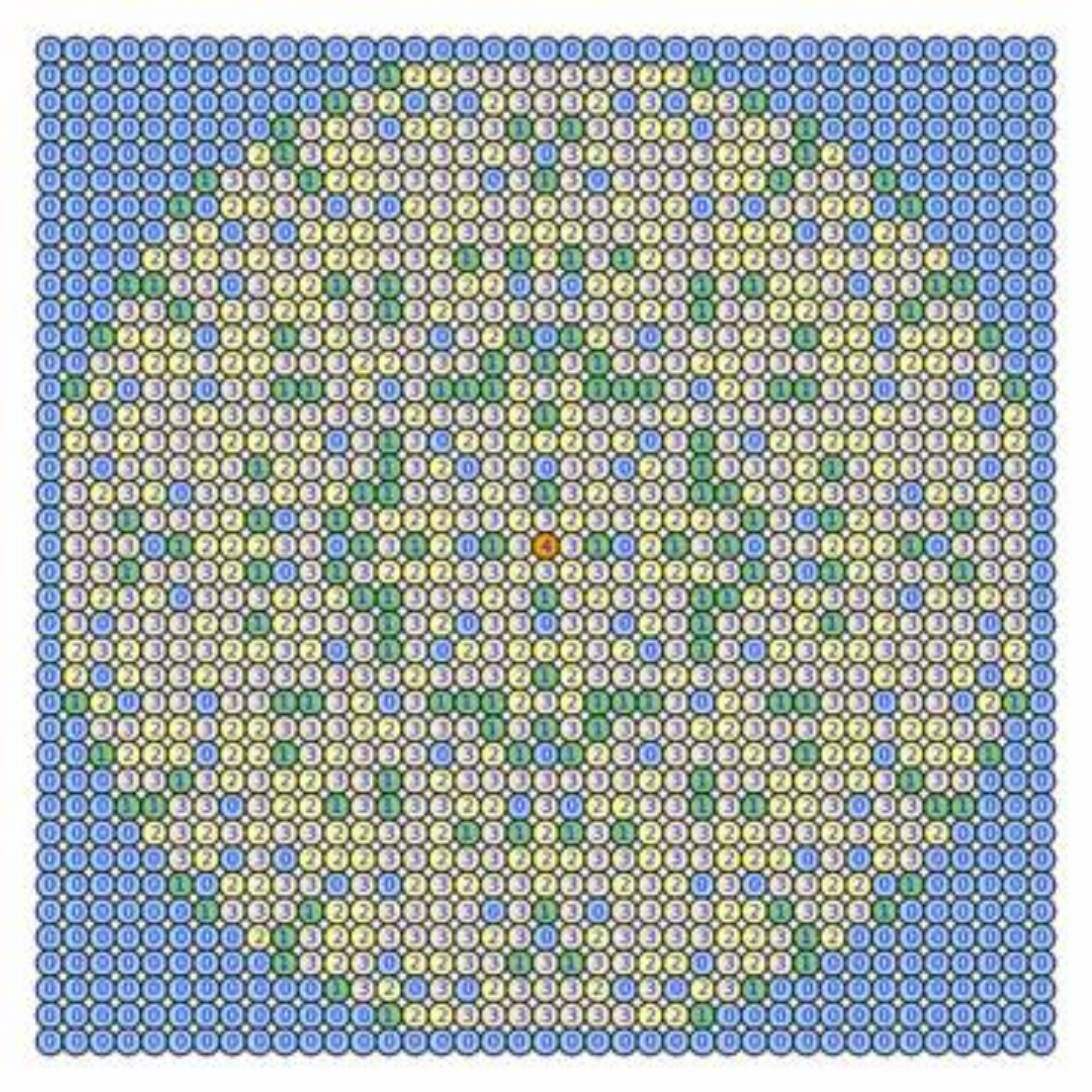
Шум 1/f

- Критическая куча песка также проявляет так называемый 1/f шум.
- То есть, спектр мощности, определяемый как

$$S(f) = \int \langle F(t_0 + t) F(t_0) \rangle \exp(2\pi i f t) dt \,,$$

  имеет форму $S(f) = 1/f^b$ с $b \approx 1$.
- Это отличается от случайного «белого шума», для которого выполняется $1/f^0$ и от случайного (Броуновского) блуждания, которому соответствует $1/f^2$. Шум 1/f часто определяют как любой шум со спектром $0<b<2$

Свойства модели «куча песка»



1. Добавление песчинки может не оказать никакого влияния на состояние других ячеек системы, а может и привести к каскадному процессу, затрагивающему все ячейки. Это означает, что корреляционная длина и время корреляции стремятся к бесконечности (без внешней подстройки в отличие от ситуации фазового перехода).

Свойства модели «куча песка»

2. Изменение параметров системы можно интерпретировать как фликкер-шум (или «розовый» шум), у которого спектр мощности обратно пропорционален частоте. Фликкер-шум указывает на концентрацию энергии в преимущественно медленных процессах.

3. Статистические характеристики описываются степенными законами распределения вероятности:

$$p(x) \sim x^{-(1+\alpha)}, \ \ 0 < \alpha < 1$$